Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Université de Strasbourg 2014
Institut de Physique du Globe de Strasbourg-UMR 7516 CNRS

Monitornig d'un site géothermique à l'aide de données magnétotelluriques

TARTRAT Timothé

Rapport de Stage M2

Encadrant : Pascal SAILHAC

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Principe de la méthode magnétotellurique **3**

2.1 Équations de Maxwell 3

2.2 Demi espace homogène 3

2.3 Milieu à une dimension avec N couches 5

2.4 Milieu 2-D 7

2.5 Geomagnetic Deep Sounding (GDS) 8

2.6 Distortion galvanique et dimentionalité 8

2.7 Le tenseur de phase 9

3 Traitement de données magnétotelluriques acquises sur un site géothermique **11**

3.1 Le site 11

3.2 Les données 11

3.3 Monitoring 15

4 Programme de modélisation **21**

4.1 Fonctionnement du programme 21

4.2 Comparaison de l'influence de différents paramètres 22

4.3 Modélisation de monitoring 26

5 Discussion **27**

6 Conclusion **28**

A Calcul des invariants du tenseur de phase **29**

B Détails du code de modélisation **30**

1 Introduction

La magnétotellurie est un méthode passive utilisant les champs électromagnétiques naturels comme sources. Ces champs ont deux origines : les mouvements du noyau externe liquide et l'interaction des vents solaires avec la magnétosphère et l'ionosphère. Ces phénomènes ont des périodes allant de $10^{-3}s$ à $10^{5}s$. La technique consiste à mesurer à la surface les champs électriques et magnétiques horizontaux qui sont liés par le tenseur d'impédance. Ce tenseur permet ensuite d'obtenir des grandeurs caractéristiques du sous-sol comme le résistivité apparente ou la phase.

Des mesures électriques et magnétiques ont été éffectuées sur le site géothermique de Soultz-sous-forêts au Nord de l'Alsace dans les années 2000 dans le cadre de la thèse de Mathieu Darnet. Les mesures électriques ont principalement été utilisées pour détecter des effets électrocinétiques grâce aux analyses utilisant le potentiel spontané. Les mesures magnétotelluriques n'étaient elles pas de très bonne qualité et n'avaient pas pu être utilisées. En 2011 des études de monitoring magnétotelluriques ont été effectuées sur le site géothermique de Paralana en Australie (Peacock et al., 2013). Dans cette, étude Peakock et al. ont utilisé du tenseur de phase qui n'est pas affecté par la distortion galvanique et des zones de changement de résistivité ont pu être mise en évidence.

De juin à juillet 2013, de nouvelles injections ont été réalisées sur le site géothermique de Rittershoffen, à 6km de Soultz-sous-forêts. Ces injections furent l'occasion de prendre de nouvelles mesures magnétotelluriques avec un équipement moderisé afin d'effectuer un suivi du site en utilisant le tenseur de phase. Les données ont d'abord été triées pour voir lequelles étaient exploitables, puis elles ont été traitées de façon à pouvoir observer notamment l'évolution du tenseur de phase d'un jour à l'autre. En plus de cette partie de traitement, des modélisations ont été effectuées pour regarder l'effet d'une variation d'une caratéristique du sous-sol (la profondeur d'une discontinuité de conductivité, sa taille...) sur le tenseur d'impédance et ses différents paramètres.

2 Principe de la méthode magnétotellurique

2.1 Équations de Maxwell

La propagation d'un champ électromagnétique est décrite par les équations de Maxwell :

$$\nabla.b = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla.d = \rho \tag{2.2}$$

$$\nabla \times e = -\frac{\partial b}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times h = j + \frac{\partial d}{\partial t} \tag{2.4}$$

e est le champ électrique, b le champ magnétique, h l'intensité magnétique et d le courrant de déplacement. ρ est la densité de charge électrique et j la densité de courrant électrique. Dans un milieu isotrope : $b = \mu h$ et $d = \epsilon e$. De plus la loi d' Ohm nous donne : $j = \sigma e$. Donc on peut réécrire les équations :

$$\nabla.b = 0 \tag{2.5}$$

$$\nabla.e = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{2.6}$$

$$\nabla \times e = -\frac{\partial b}{\partial t} \tag{2.7}$$

$$\nabla \times b = \mu\sigma e + \mu\epsilon\frac{\partial e}{\partial t} \tag{2.8}$$

2.2 Demi espace homogène

On utilise l'identité suivante :

$$\nabla \times (\nabla \times b) = \nabla.(\nabla.b) - \nabla^2 b$$

Or $\nabla.b = 0$ donc $\nabla \times (\nabla \times b) = -\nabla^2 b$.
De plus :

$$\nabla \times (\nabla \times b) = \nabla \times (\mu\sigma e + \mu\epsilon\frac{\partial e}{\partial t}) = \mu\sigma\nabla \times e + \mu\epsilon\frac{\partial(\nabla \times e)}{\partial t} = -\mu(\sigma\frac{\partial b}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial^2 b}{\partial^2 t}) \tag{2.9}$$

Soit

$$\nabla^2 b = \mu(\sigma\frac{\partial b}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial^2 b}{\partial^2 t}) \tag{2.10}$$

On note en majuscule les transformées de Fourier : $B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-i\omega t}dt$ et on a :

$$(\nabla^2 - i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon)B = 0 \tag{2.11}$$

En magnétotellurie on utilise les basses fréquences donc $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$ et $\omega^2\mu\epsilon \ll \omega\mu\sigma$. On obtient donc l'équation de diffusion pour B :

$$(\nabla^2 - i\omega\mu\sigma)B = 0 \tag{2.12}$$

On pose $k^2 = i\omega\mu\sigma$. De même on obtient l'équation de diffusion pour E :

$$(\nabla^2 - k^2)E = 0 \tag{2.13}$$

Pour une onde plane se propageant selon z, les solutions sont de la forme :

$$B = B_0e^{-kz} + B_1e^{kz} \tag{2.14}$$

$$k^2 = i\omega\mu\sigma \tag{2.15}$$

$$k = \sqrt{\omega\mu\sigma}\sqrt{i} = \sqrt{\omega\mu\sigma}e^{i\frac{\pi}{4}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

et on pose $v = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$. B doit être nul quand z tend vers l'infinit (car il n'y a pas de sources dans le milieu donc l'énergie ne peut être qu'atténuée) donc $B_1 = 0$ et $B = B_0e^{-ivz}e^{-vz}$. De même $E = E_0e^{-ivz}e^{-vz}$. Le champ électromagnétique présente deux comportements : un variation sinusoidale avec la profondeur et une atténuation avec la profondeur. L'amplitude du champ est atténuée d'un facteur e^{-1} à la profondeur caractéristique δ, appelée épaisseur de peau :

$$\delta = \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{2.16}$$

L'équation de Maxwell-Faraday $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ nous donne :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Or E ne dépend que de z, donc :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x$$

Or $\frac{\partial E_y}{\partial z} = -kE_{y0}e^{-kz}$, donc : $kE_{y0}e^{-kz} = -i\omega B_{x0}e^{-kz}$
On pose l'impédance magnétotellurique Z :

$$Z(\omega) = \frac{E_{y0}}{H_{x0}} = \mu\frac{E_{y0}}{B_{x0}} = -\mu\frac{i\omega}{k} = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\sqrt{i} \tag{2.17}$$

On obtient deux paramètres à partir de l'impédance :
$\rho = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2$ la résistivité du demi-éspace
$\phi = arg(Z) = arg(\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\sqrt{i}) = arg(e^{i\frac{\pi}{4}}) = 45^\circ$: la phase scalaire qui vaut 45° dans un demi-espace homogène.

2.3 Milieu à une dimension avec N couches

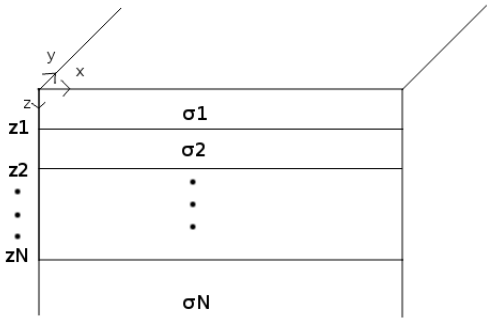

FIGURE 2.1 – schéma d'un milieu à N couches

La composante x du champ E pour la couche n s'écrit :

$$E_{xn} = a_n(k_n, \omega)e^{-k_n z} + b_n(k_n, \omega)e^{-k_n z} \tag{2.18}$$

de même pour le champ B dans la direction y :

$$B_{yn} = a_n(k_n, \omega)e^{-k_n z} + b_n(k_n, \omega)e^{-k_n z} \tag{2.19}$$

On obtient la fonction de transfert pour la couche n :

$$C_n(z) = \frac{E_{xn}(z)}{i\omega B_{yn}(z)} = \frac{Z_n(z)}{i\omega\mu} \tag{2.20}$$

Il existe une formule de récurrence qui lie $C_n(z-1)$ à $C_{n+1}(z)$ qui permet de calculer la fonction de transfert pour chaque couche en partant de celle du bas. On peut alors définir la résistivité apparente qui est la résistivité moyenne du demi-éspace homogène équivalent :

$$\rho_a = |C(\omega)|^2 \mu\omega \tag{2.21}$$

On peut aussi définir la phase :

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{Im(C)}{Re(C)}) \tag{2.22}$$

ρ_a et ϕ sont liés par la relation de Kramers-Kronig :

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} log(\frac{\rho_a(\omega')}{\rho_0})d\omega' \tag{2.23}$$

Pour une fréquence donnée, ϕ dépend de ρ_a pour toutes les fréquences. On peut donc prédire la forme de la courbe de ρ_a à partir de ϕ. On ne peut cependant pas déterminer sa position absolue.
Dans le cas d'un modèle à deux couches :

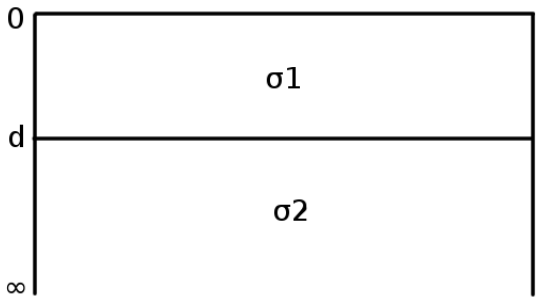

FIGURE 2.2 – schéma d'un milieu à 2 couches

On obtient les courbes suivantes pour ρ_a et ϕ en fonction de la période :

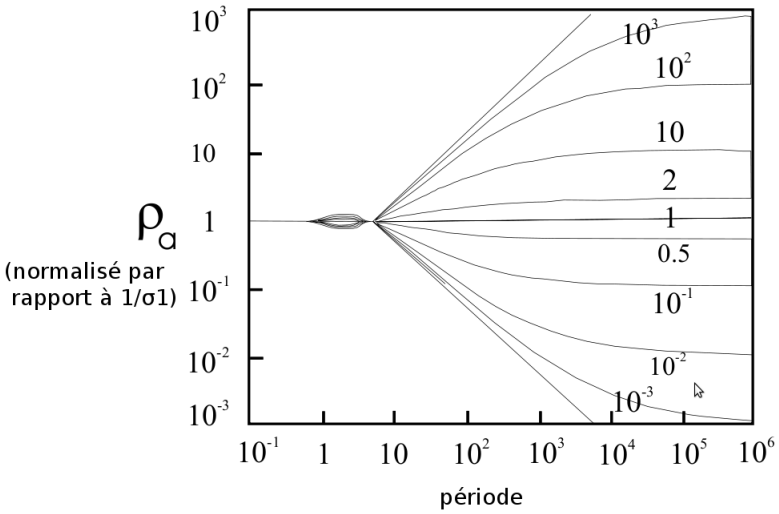

FIGURE 2.3 – ρ_a en fonction de la période

Les nombres après chaque courbes indiquent la valeur de $\frac{\sigma_1}{\sigma 2}$.

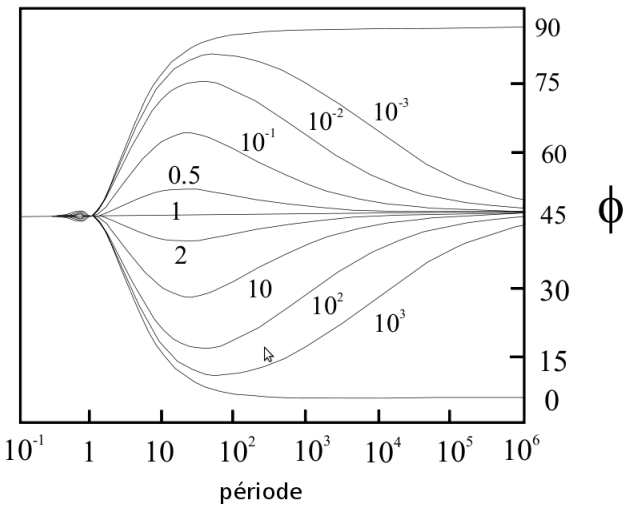

FIGURE 2.4 – ϕ en fonction de la péridoe

Aux courtes périodes ρ_a tend vers la résistivité de la couche supérieure et aux longues périodes vers celle de la couche inférieure. Cela illustre bien le fait que les longues périodes pénètrent plus en profondeur. Pour la phase, aux très courtes et aux très longues périodes on est dans le cas d'un demi-éspace homogène avec $\phi = 45^\circ$. Pour la bonne gamme de période, on a $\phi > 45^\circ$ si le milieu inférieur est plus conducteur et $\phi < 45^\circ$ s'il est plus résistant.

2.4 Milieu 2-D

Dans le cas d'un milieu 2-D où les structures sont infinies selon l'axe x, on peut découpler les équations régissant les composantes du champ électromagnétique en deux systèmes (grâce au fait que les dérivées par rapport à x soient nuelles) :
Tansverse électrique :

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = i\omega B_z \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = i\omega B_y \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_x \end{cases} \tag{2.24}$$

Transverse magnétique :

$$\begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \sigma E_z \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_y \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x \end{cases} \tag{2.25}$$

Dans le bon système de coordonnées, on a alors :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Dans ce cas on écrit :

$$\rho_{a,ij} = \frac{\mu_0}{\omega} |Z_{ij}(\omega)|^2 \tag{2.27}$$

$$\phi_{ij} = \tan^{-1}(\frac{Im(Z_{ij}(\omega))}{Re(Z_{ij}(\omega))}) \tag{2.28}$$

2.5 Geomagnetic Deep Sounding (GDS)

Avec cette méthode on mesure les composantes horizontales et verticales du champ magnétique. Le principe est de dire qu'il n'y a normalement pas de composante verticale du champ magnétique naturel et donc la valeur de B_z observée si elle existe est due à une variation latérale de conductivité. On suppose qu'il existe une relation entre les composantes horizontales et verticales du champ induit :

$$B_z = T_x B_x + T_y By \tag{2.29}$$

T_x et T_y sont appelés la fonction de transfert magnétique. On peut représenter graphiquement le vecteur complex (T_x, T_y) grâce aux flèches d'induction. La longueur de chaque flèche vaut :

$$\sqrt{Re(T_x)^2) + Re(T_y)^2)} \tag{2.30}$$

et

$$\sqrt{Im(T_x)^2) + Im(T_y)^2)} \tag{2.31}$$

et leur orientation vaut :

$$\tan^{-1}(\frac{\pm Re(T_y)^2)}{\pm Re(T_x)^2)}) \tag{2.32}$$

et

$$\tan^{-1}(\frac{Im(T_y)^2)}{Im(T_x)^2)}) \tag{2.33}$$

Selon la convention choisie, les flèches pointent soit vers les zones les plus conductives, soit vers les plus résistives.

2.6 Distortion galvanique et dimentionalité

Les hétérogénéités à petites échelles et à faibles profondeurs (petites devant l'épaisseur de peau) vont distordre la direction et l'amplitude du champ électrique régionale. Elles ont pour effet de décaler la valeur de la résistivité apparente indépendamment de la période, c'est pourquoi ces effets sont appelés décalages statiques. C'est un effet à prendre en compte lors des mesures en magnétotellurie, il existe plusieurs méthodes pour les retirer. Il est également important de connaître la dimensionalité du système. Pour cela on utilise le facteur skew :

$$\kappa = \frac{|Z_{xx} + Z_{yy}|}{|Z_{xy} - Z_{yx}|} \tag{2.34}$$

Plus κ est grand, plus on s'éloigne d'un modèle 2-D. Pour des valeurs supérieures à 0,2-0,3 la distribution des conductivités est 3-D.

2.7 Le tenseur de phase

L'avantage de la méthode du tenseur de phase est qu'elle ne nécessite pas de connaître la dimentionalité du système et elle n'est pas affecté par le dćalage statique. On généralise l'expression précédente de la phase pour obtenir un tenseur : soient X la partie réelle du tenseur d'impédance Z et Y sa partie imaginaire, on a :

$$\Phi = X^{-1}Y \tag{2.35}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

On peut vérifier que ce tenseur n'est pas affecté par la distortion galvanique : on note X_r et Y_r les parties réelles et imaginaires de Z_r, le tenseur d'impédance régional sans les effets de distortion. On a $Z = DZ_r$ avec D la matrice de disortion due aux hétérogénéités locales.
$X = DX_r$ et $Y = DY_r$ donc :

$$\Phi = X^{-1}Y = (DX_r)^{-1}(DY_r) = X_r^{-1}D^{-1}DY_r = X_r^{-1}Y_r = \Phi_r \tag{2.37}$$

Le tenseur de phase a trois invariants primaires :

$$\Phi_1 = \frac{tr(\Phi)}{2} = \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}}{2} \tag{2.38}$$

$$det(\Phi) = \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx} \tag{2.39}$$

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_{xy} - \Phi_{yx}}{2} \tag{2.40}$$

À partir de ces invariants primaires on peut construire trois autres invariants qui représentes mieux les propriétés de la phase :

$$\Phi_{min} = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2} - \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2 - det(\Phi)} \tag{2.41}$$

$$\Phi_{max} = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} + \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2 - det(\Phi)} \tag{2.42}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{\Phi_3}{\Phi_1}) \tag{2.43}$$

On peut définir un autre paramètre qui lui n'est pas invariant :

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{\Phi_{xy} - \Phi_{yx}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}}) \tag{2.44}$$

grâce auquel on peut écrire :

$$\Phi = R^T(\alpha - \beta)\begin{bmatrix} \Phi_{max} & 0 \\ 0 & \Phi_{min} \end{bmatrix} R(\alpha + \beta) \tag{2.45}$$

avec R une matrice de rotation :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

On peut représenter graphiquement le tenseur de phase par une ellipse :

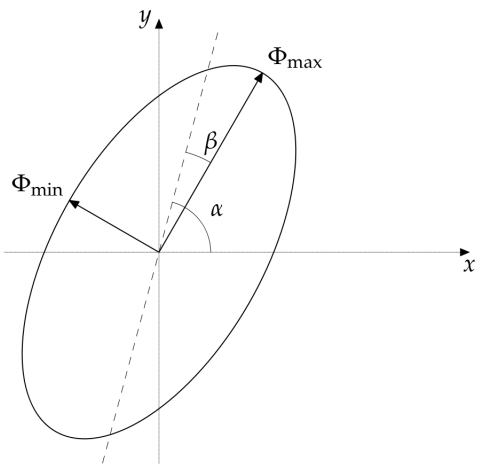

FIGURE 2.5 – représentation graphique du tenseur de phase

Dans le cas d'un demi-éspace homogène on a un cercle de rayon unitaire. Pour un milieu 1-D, on a un cercle dont le rayon varie avec la période de la même manière que la conductivité varie avec la profondeur. Pour un milieu presque 2-D, on a $\beta \approx 0$ et l'axe majeur ou mineur (Φ_{max} ou Φ_{min}) est aligné avec la direction d'invariance.

3 Traitement de données magnétotelluriques acquises sur un site géothermique

3.1 Le site

Les données MT proviennent du site de Rittershoffen. Il est prévu d'y installer une centrale géothermique qui alimentera en chaleur l'usine de Roquette Frères située à Beinheim à environ 15 km de la centrale. Ce projet, lancé par la société Ecogi composée du groupe Electricité de Strasbourg, de Roquette Frères et de la Caisse des Dépôts, a necessité un inverstissement de 45 millions d'euros et devrait être opérationnelle en 2015. La centrale fournira 24 mégawatt thermiques à l'usine soit 25% de sa consommation d'énergie, ce qui lui permettra de réduire les émissions de CO2 de 39 000 tonnes par an.

3.2 Les données

Les données ont été acquises de juin à juillet 2013 selon le dispositif suivant :

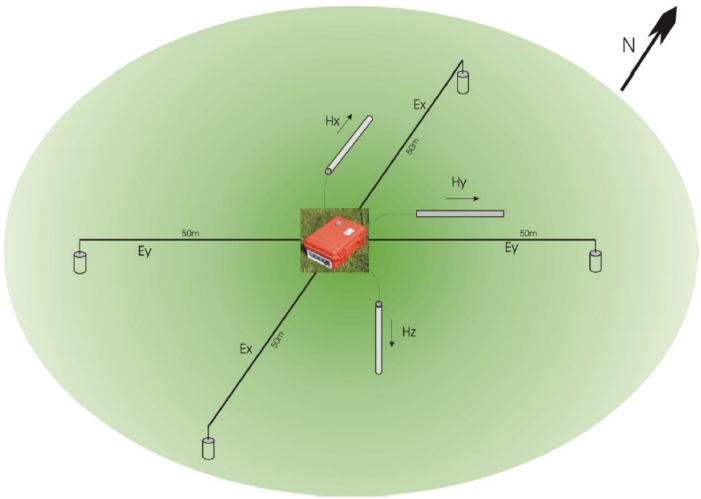

FIGURE 3.1 – Schéma d'acquisition des données magnétotelluriques, d'après le manuel d'utilisation de l'ADU_07. Le dispositif est constitué de deux paires d'ellectrodes séparées de 100m et orientées Nord-Sud et Est-Ouest pour acquérir le champ électrique horizontal. Pour mesurer le champ magnétique il y a trois sonde magnétiques orientées dans la direction Nord-Sud, Est-Oues et verticalement. Les électrodes et les sondes sont enterrées pour éviter que le vent ne les fasses bouger, ce qui provoquerai du bruit.

Elles ont été traitées avec le programme d'Alan D. Chave qui estime la fonction de réponse magnétotellurique de manière robuste. L'utilisation de ce programme à été simplifiée grâce à un interface développé dans le cadre de la thèse de Pierre Wawrzyniak et modifié dans le cadre du stage de M2 de Hugo Larnier. La première étape a été de lancer le programme de Chave pour les journées suivantes : les 13, 14, 15,

16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29 juin 2013 et les 01, 02, 03, 04, 05, 06, 18, 19 et 20 juillet 2013. Pour chacune de ces journées on a un jeu de données sur le site de Rittershoffen et un autre sur le site du Welsch qui va servir de station de référence. Cela permet de supprimer le bruit dû aux hétérogénéités locales, à condition qu'il ne soit pas corrélé au bruit à la station de référence. Le principe du code de Chave est de découper la série temporelle de données en pluisieurs sous-parties afin de pouvoir estimer des valeurs statistiques. En plus de ce découpage, le code utilise la méthode d'estimation de l'erreur du jackknife. Une fois les données traitées par le code de Chave, on obtient une série de fichiers binaires : un fichier pour chaque fréquence. Chacun de ces fichiers contient les différentes valeurs du tenseur d'impédance pour cette fréquence, une estimation de l'erreur sur ces valeurs et les valeurs du tipper si le champ magnétique verticale avait été enregisrté.
On commence par regarder les données du champ électromagnétique pour chaque journée individuellement grâce au programme VisuFieldG.m afin de voir quelles données semblent exploitables :

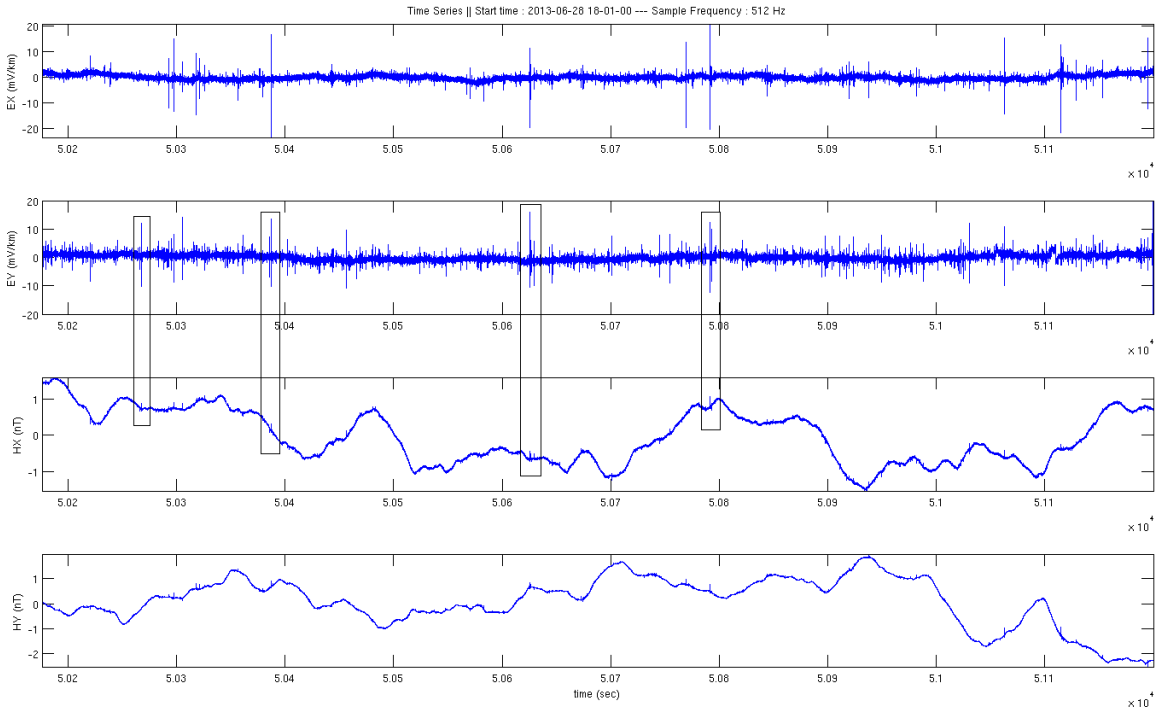

FIGURE 3.2 – Champs électriques et magnétiques pour le 28/06/2013. Il est représenté de haut en bas : la composante x du champ électrique, la composante y du champ électrique, la composante x du champ magnétique et enfin la composante y du champ magnétique. On représente 1000 secondes de données. Les parties encadrées en noir montrent les corrélations entre la composante y du champ électrique et la composante x du champ magnétique

Ces données du 28 juin 2013 sont de bonne qualité. On peut constater la corrélation entre les composantes croisées du champ électrique et du champ magnétique : on voit des évènements (oscillations br`eves duent à des éclaires) qui se produisent au même moment sur ces composantes croisées. On va ensuite comparer avec des données de moins bonne qualité :

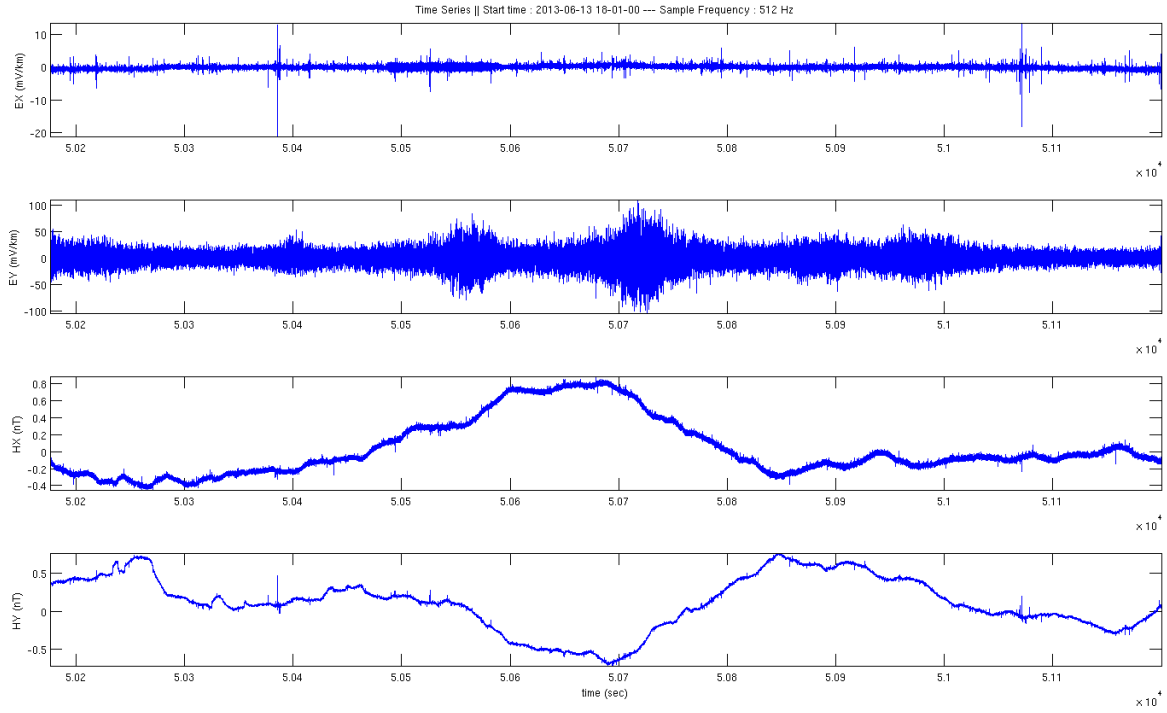

FIGURE 3.3 – Champs électriques et magnétiques pour le 13/06/2013. Sont représentés les mêmes composantes que pour la figure précédente

Sur le graphique qui montre le champ électromagnétique du 13/06 on voit que la composante y du champ électrique est mauvaise. Globalement toutes les données du 13 au 24 juin 2013 sont de mauvaise qualité. À partir du 28 juin 2013 les données deviennent de meilleur qualité, et ce jusqu'au 06 juin 2013.
On va ensuite regarder certains paramètres plus en détail pour vérifier si la qualité des résultats est lié à la qualité des données . On commence par regarder les données qui sembles de bonne qualité :

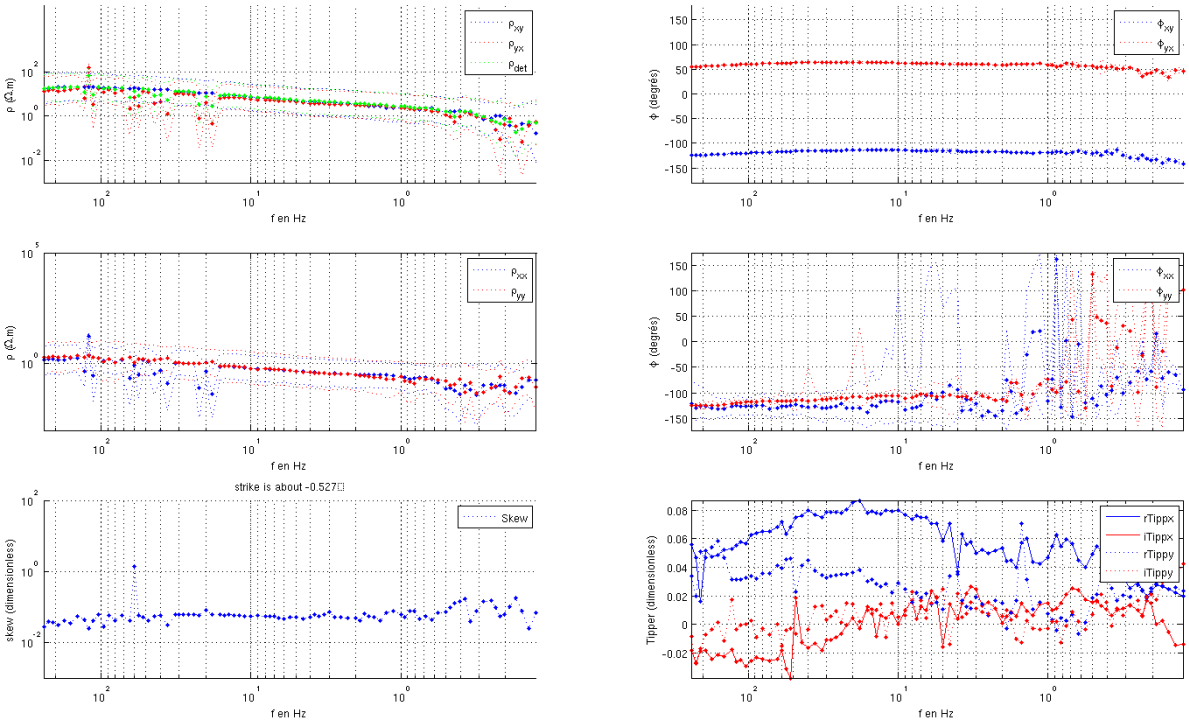

FIGURE 3.4 – Sont représentés sur cette figure pour le 28/06/2013 : en haut à gauche les termes croisés de la résistivité apparente (2.27), en haut à droite les termes croisés de la phase scalaire (2.28), au milieu à gauche les termes diagonaux de la résistivité apparente, au milieu à droite les termes diagonaux de la phase scalair, en bas à gauche le skew (2.34) et en bas à droite le tipper (2.29).

La résistivité apparente est lisse ainsi que le skew qui est également faible, la phase est située à $\pm\ 50\,^{\circ}$ environ, on obtient donc des résultats de bonne qualité. On regarde ensuite si les données qui sembles de mauvaise qualité produisent effectivement de mauvais résultats :

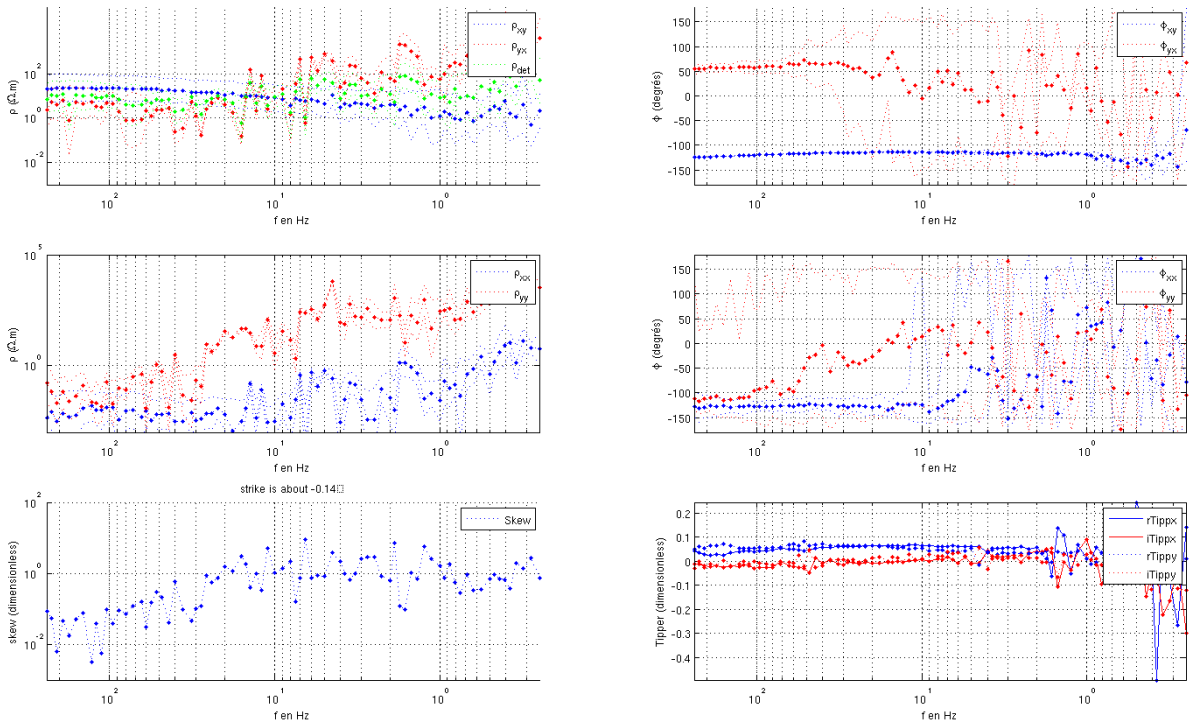

FIGURE 3.5 – Mêmes paramètres que précédemment pour le 13/06/2013

Pour le 13 juin la composante y du champ électrique était mauvaise. Cette composante intervient dans le calcul de Z_{yx} et Z_{yy} et ces deux valeurs interviennent elles dans le calcul des paramètres en yx et yy. On voit sur cette figure que pour ces paramètres (en yx et en yy) les résultats sont très irréguliers, mais que pour les paramètres en xy les données sont lisses. Il y a donc bien à priori un lien entre la qualité des données et celle des résultats. Du 13/06 au 24/06 les résultats sont semblables : la résistivité apparente et la phase sont très irrégulières comparées à celles du 27/06 au 18/07. Ces résultats sont cohérents avec les observations faites sur les données brutes : on a de mauvais résultats sur les paramètres pour les jours où les données sont de mauvaise qualité. Les résultats pour les 27/06, 28/06, 29/06, 01/07, 02/07, 03/07, 05/07, 06/07, 18/07 et 19/07 sont beaucoup plus lisses, pour la suite on va donc se concentrer sur ces dernières données.

3.3 Monitoring

On va s'inspirer des travaux de Jared R. Peacock qui a mis en place une série de capteurs magnétotelluriques pour surveiller un EGS (enhanced geothermal system) en Australie. Le principe est d'utiliser la magnétotellurie pour repérer des changement de conductivité dans le sous-sol après la phase d'injection afin de mettre en évidence d'éventuelles circulations de fluides. On utilise plus particulièrement le tenseur de phase qui n'est pas sensible aux distortions dues aux hétérogénéités locales et qui ne nécessite pas d'hypothèse sur la dimensionalité du système.
On va dans un premier temps utiliser un programme dérivé de VisuMTG_SITE.m qui a été modifié pour

visualiser le tenseur de phase ainsi que d'autres paramètres, et ce pour chaque jour qui nous intéresse. Le code va calculer pour chaque jour à chaque fréquence le tenseur de phase en faisant varier les valeurs du tenseur d'impédance de la manière suivante : on décale la valeur de chacune des composante de l'erreur calculée par le code de Chave et ce dans plusieurs directions différentes, indépendamment pour chaque composante. On obtient donc plusieurs valeurs pour chaque composantes du tenseur de phase pour la même fréquence. On va calculer certains paramètres à partir de ce tenseur : Φ_{min} (2.41), Φ_{max} (2.42), α (2.44), β (2.43) ... On aura donc pour chaque fréquence plusieurs valeurs pour tout ces paramètres, ce qui nous permettra d'estimer plusieurs grandeurs statistiques. On choisit comme bonne valeur la médianne car elle est peu influencée par les valeurs extrêmes. On prend comme borne supérieure la valeur telle que 97,5% des valeurs soient plus petites et comme borne inférieure celle telle que 97,5% des valeurs soient plus grandes.
On obtient les résultats suivants :

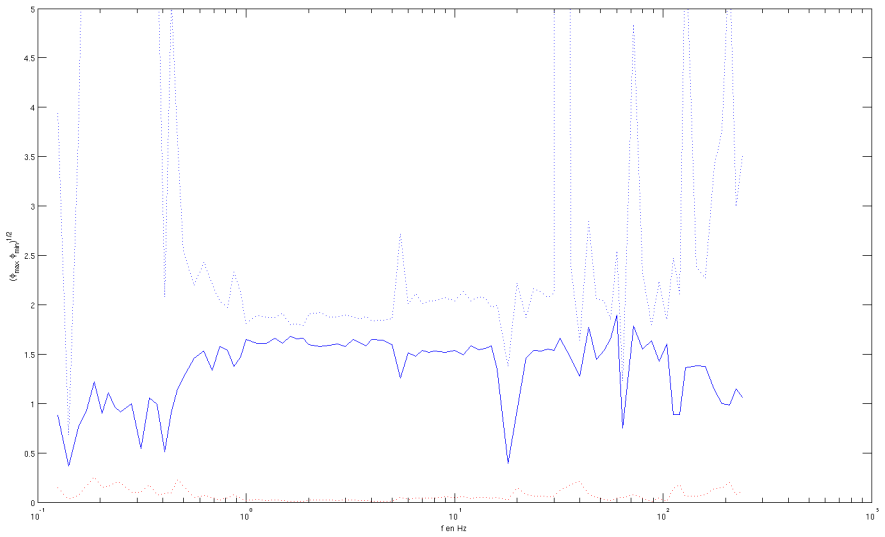

FIGURE 3.6 – $\sqrt{\Phi_{min}\Phi_{max}}$ pour le 01/07

Pour certaines fréquences les barres d'erreur sont plus petites que pour d'autres, on peut regarder si cela se produit pour les mêmes fréquence pour des jours différents. Pour cela on représente sur un même graphique le paramètre à une fréquence donnée avec les barres d'erreur pour plusieurs jours. Les figures suivantes montrent les valeurs de α, β, $\alpha - \beta$ et $\sqrt{\Phi_{min}\Phi_{max}}$ pour les 27/06, 28/06, 29/06, 01/07, 02/07 et 18/07 de gauche à droite sur un même graphique, à chaque fois pour une fréquences donnée :

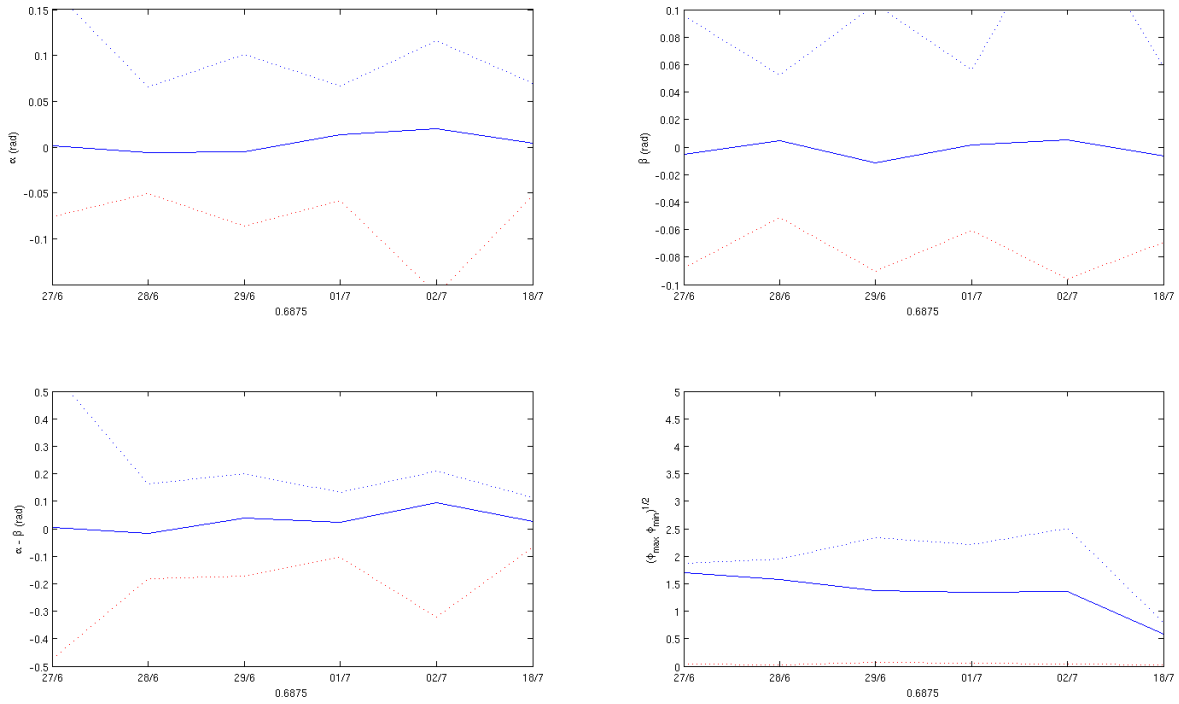

FIGURE 3.7 – 0,7 Hz

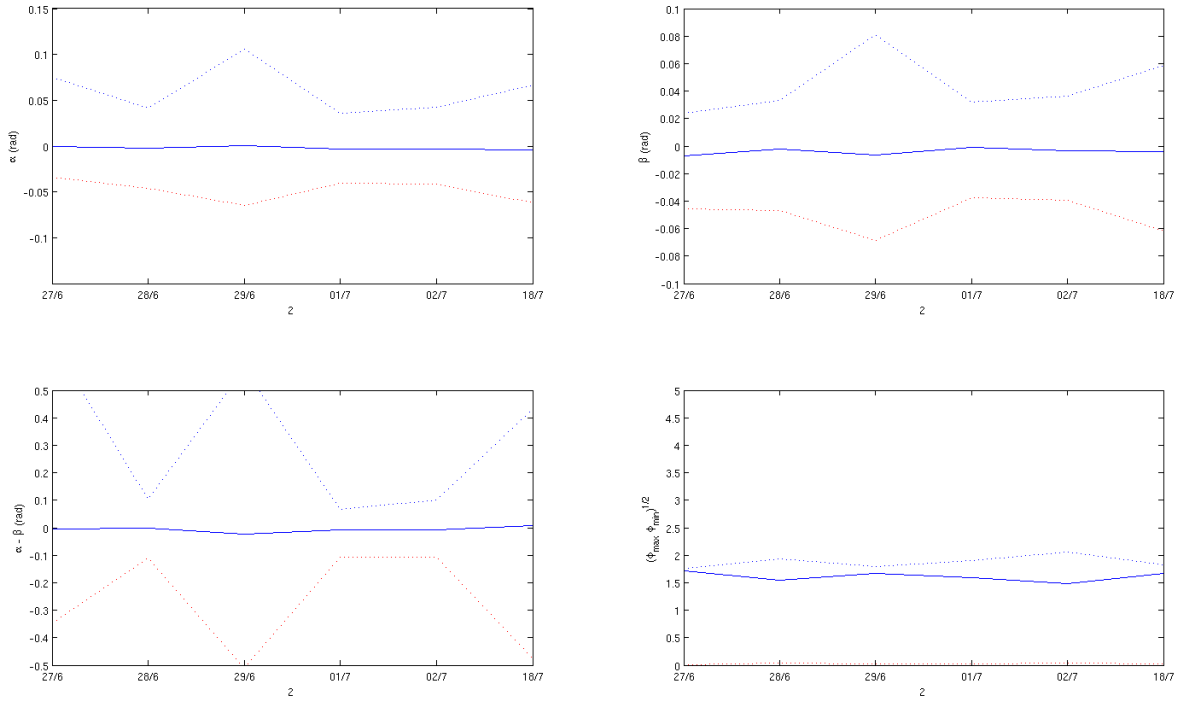

FIGURE 3.8 – 2 Hz

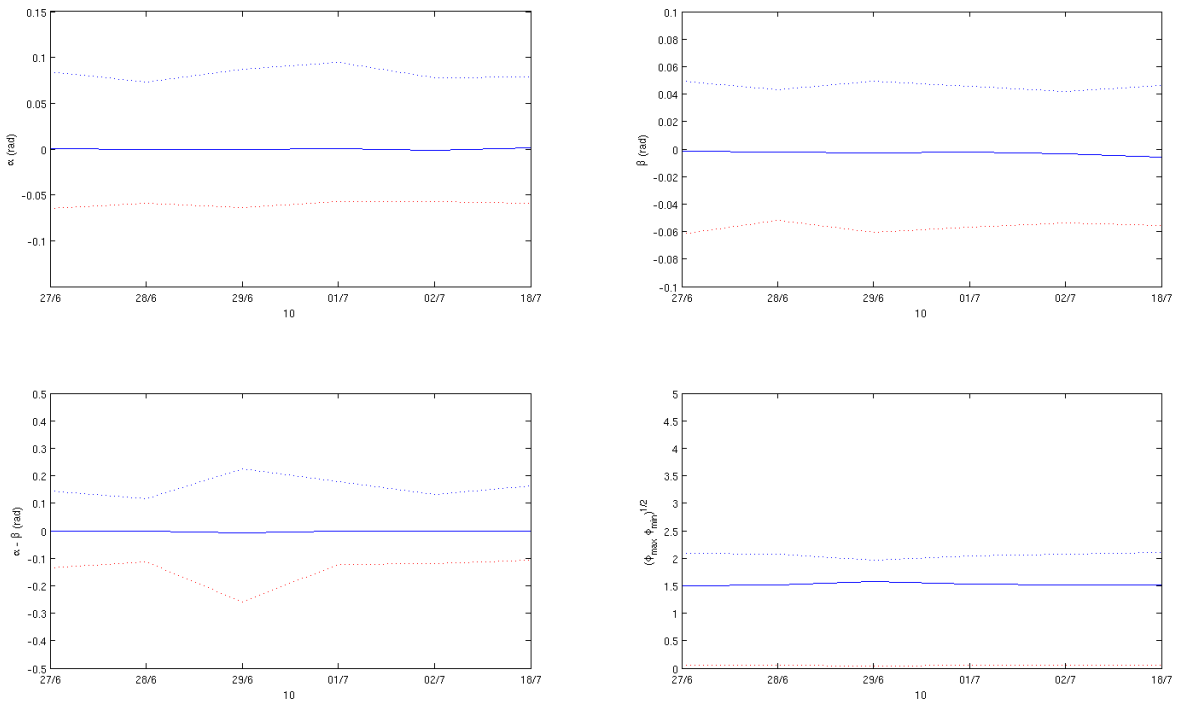

FIGURE 3.9 – 10 Hz

On voit que globalement les barres d'erreur sont les mêmes à une fréquence donnée pour tous les jours, avec parfois une différence pour le 27/06 (tout à gauche) ou pour le 18/07 (tout à droite). Cela est peut-être dû au fait qu'il manque les basses fréquences pour ces deux journées (car les capteurs magnétiques de la station du Welsch n'ont pas enregistré toute la journée).
On va mainteant regarder l'évolution du tenseur de phase entre deux jours. Pour cela on procède de la même manière que Peacock en calculant le résidu :

$$\Delta\Phi_{1,2} = I - ((\Phi_1)^{-1}\Phi_2) \tag{3.1}$$

Φ_1 est le tenseur de phase pour le jour le plus ancien (pré-injection) et Φ_2 le tenseur de phase pour le jour le plus récent (post-injection). I est la matrice identité et $(\Phi_1)^{-1}$ l'inverse de Φ_1. Avec le résidu on calcule plusieurs paramètres comme $\Delta\Phi_{min}$, $\Delta\Phi_{max}$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ ... On va là aussi prendre la médianne comme bonne valeur, la valeur où 97,5% des valeurs sont plus petites comme borne supérieure et celle où 97,5% des valeurs sont plus grandes comme borne inférieure. On obtient les figures suivantes sur lesquels on peut voir certains paramètres issus du résidu entre deux jours différents :

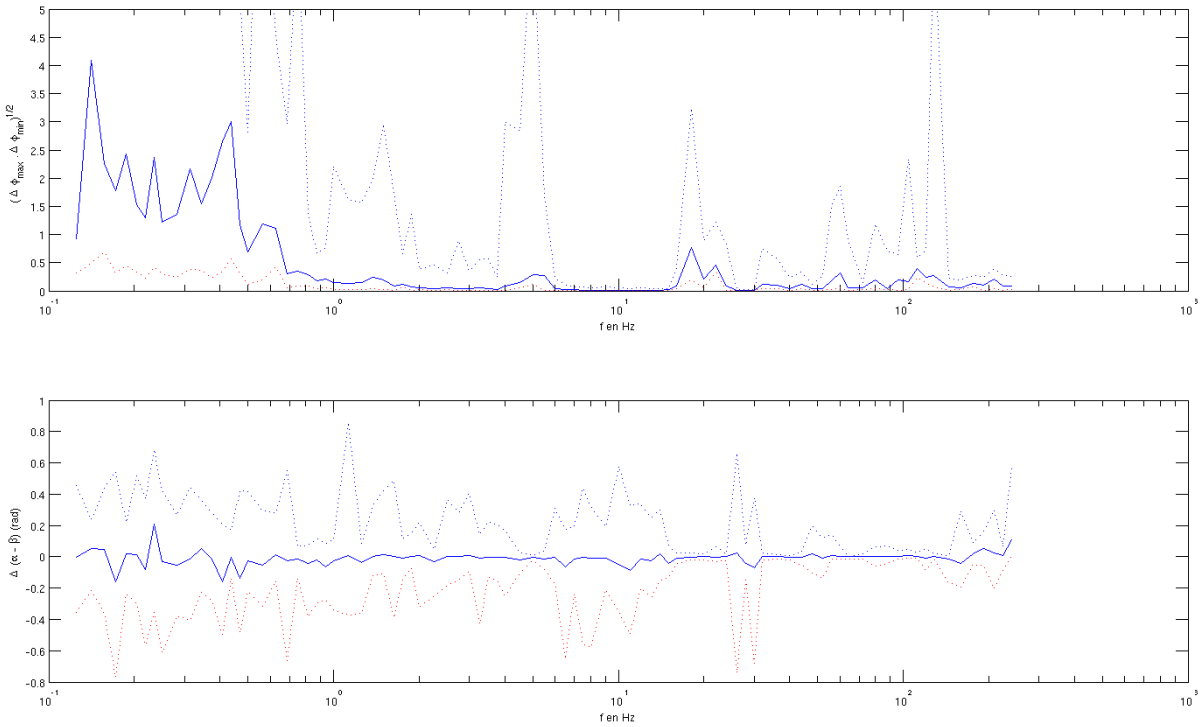

FIGURE 3.10 – $\sqrt{\Delta\Phi_{min}\Delta\Phi_{max}}$ et $\Delta(\alpha-\beta)$ du résidu entre le 01/07 et le 02/07

Dans son article, Jared R. PEACOCK représente le tenseur de phase par des ellipses pour voir l'évolution de la résistivité entre deux périodes. Le grand axe de l'ellipse est $\Delta\Phi_{max}$, le petit est $\Delta\Phi_{min}$ et elle est tournée d'un angle $\Delta\alpha - \Delta\beta$. On a pu voir précédemment sur $\sqrt{\Phi_{min}\Phi_{max}}$ que les barres d'erreur sont plus grandes an-dessous de $1Hz$ et au-dessus de $10Hz$. On va donc maintenant les ellipses seulement entre 1 et 10 Hz :

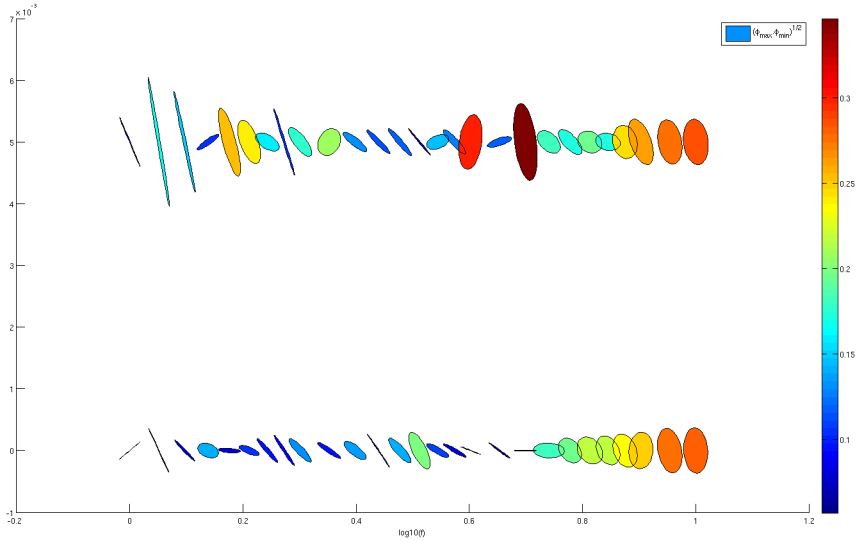

FIGURE 3.11 – ellipses entre le 01/07 et le 02/07. Elles sont classées des basses fréquences à gauche aux hautes fréquences à droite.

On peut voir que globalement le ellipses s'orientent dans la direction Nord-Sud qui est la direction de la faille majeur présente à Rittershoffen
On peut également afficher les ellipses entre $1Hz$ et $10Hz$ les une au-dessus des autres pour les 6 jours qui nous intéressent :

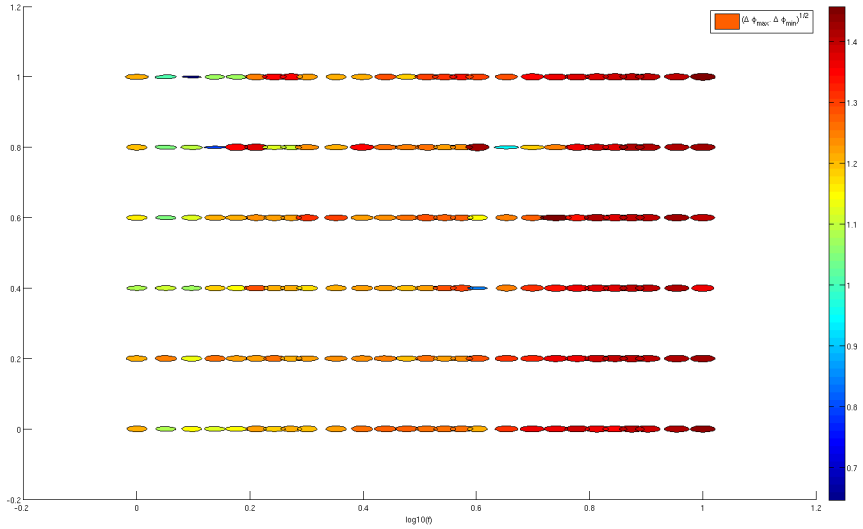

FIGURE 3.12 – ellipses entre le 27/06, 28/06, 29/06, 01/07, 02/07 et 18/07 (27/06 en bas et 18/07 en haut)

On constate qu'à plus haute fréquence la taille des ellipses augmente.

4 Programme de modélisation

4.1 Fonctionnement du programme

Le but de ce programme est de modéliser en surface le champ électrique, magnétique, le tenseur d'impédence, la résistivité apparente et la phase produits par une hétérogénéité de conductivité en profondeur. On a un volume homogène de surface 100×100 et de profondeur variable avec une taille de maille de 100m et une conductivité donnée. On place à l'intérieur de ce volume une hétérogénéité de conductivité différente en forme de pavé.
On définit d'abord les caractéristiques du milieu homogène :
La pulsation ω, la perméabilité magnétique de vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ et la conductivité $\sigma_0 = 1$.
Ensuite on définit deux champs électromagnétiques primaires polarisé perpendiculairement l'un à l'autre, le premier a un champ électrique entièrement selon l'axe des X et le second a son champ électrique entièrement selon l'axe des Y.
Ce qui nous donne les champs $\vec{E_{01}}$, $\vec{B_{01}}$, $\vec{E_{02}}$ et $\vec{B_{02}}$ sans anomalie :

$$E_{0x1} = |E_{01}|exp(-\frac{iz}{\delta})exp(-\frac{z}{\delta}); E_{0y2} = |E_{02}|exp(-\frac{iz}{\delta})exp(-\frac{z}{\delta})$$

$$B_{y01} = \frac{k}{i\omega}E_{x01}; B_{x02} = -\frac{k}{i\omega}E_{y02}; \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}$$

δ est en m, on doit donc prendre z en m. On définit ensuite les caractéristiques de l'anomalie pavé : en commençant par définir ses limites en X, Y et Z, puis on lui donne une conductivité σ_1.
Ensuite on calcul le champ $\vec{E}$ en tout point de l'anomalie avec la formule :

$$\vec{E(r)} = \vec{E_0(r)} - i\omega\mu_0 \int \frac{exp(i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|}(\sigma_1(r') - \sigma_0(r'))\vec{E(r')}dv$$

$$+\nabla\frac{1}{\sigma 0}\nabla. \int \frac{exp(i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|}(\sigma_1(r') - \sigma_0(r'))\vec{E(r')}dv$$

Le deuxième terme à droite de l'équation est la partie inductive du champ électrique et le troisième terme est la partie galvanique. Au départ on ne connait pas $\vec{E(r')}$ donc on utilise $\vec{E_0(r')}$. En principe, une fois qu'on a calculé une première fois $\vec{E}$ en tout point de l'anomalie, on recommence en utilisant pour $\vec{E(r')}$ la valeur de $\vec{E}$ que l'on vient de calculer. Cependant la valeur du champ électrique ne convergent pas on utilisera seulement le résultat de la première boucle. On calcul ensuite le champ $\vec{E}$ en surface avec la première formule. Pour le calcul du champ $\vec{B}$ en surface, on procède en utilise la formule suivante :

$$\vec{B(r)} = \vec{B_0(r)} + \mu_0\vec{\nabla} \otimes \int \frac{exp(i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|}(\sigma_1(r') - \sigma_0(r'))\vec{E(r')} = \vec{B_0(r)} + \mu_0\vec{\nabla} \otimes \vec{B_1(r)}$$

En résolvant le système formé par les deux camps électromagnétiques polarisés perpendiculairement on obtient les différentes composantes du tenseur d'impédance. À partir de ce tenseur on peut obtenir la phase, la résistivité apparente, le skew et le tenseur de phase.

4.2 Comparaison de l'influence de différents paramètres

Dans cette partie on va faire varier différents paramètres, à savoir la profondeur de l'hétérogénéité, la fréquence du champ électromagnétique primaire et la conductivité de l'hétérogénéité. On définit pour le modéle de référenceles paramt́res suivants : les champs électriques ont un module de $1V.m^{-1}$, une fréquence est de 100Hz et la conductivité du milieu homogène est de $0.001S.m^{-1}$, ce qui donne une épaisseur de peau de 1.5km. L'hétérogénéité de conductivité a des dimensions allant de 1Km à 3km en x, de 4km à 4.5km en y et de 1km à 1.5km en profondeur, avec une conductivité de $0.01S.m^{-1}$. Les paramètres sur lesquels on va jouer sont la fréquence, la profondeur et la conductivité de l'hétérogénéité. On va commencer par regarder ce qu'on obtient pour ces paramètres :

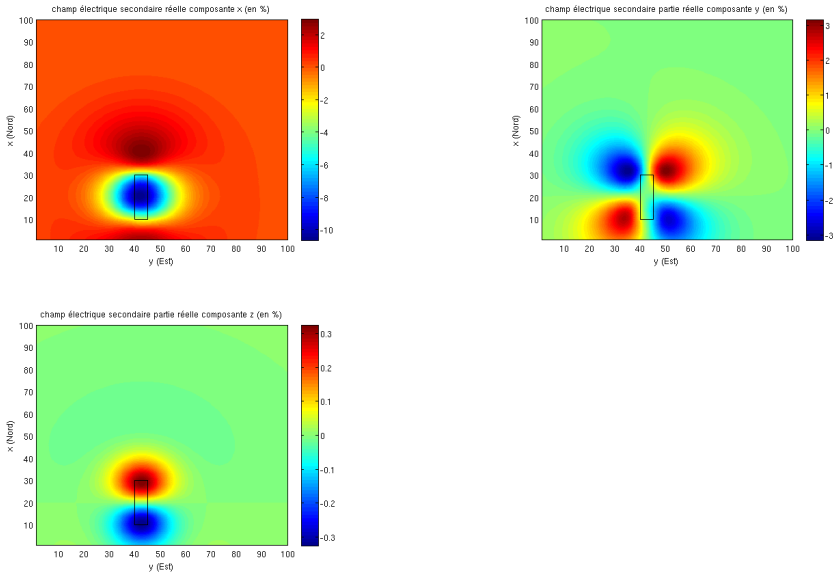
champ électrique secondaire réelle composante x (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante y (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante z (en %)
x (Nord)
y (Est)

FIGURE 4.1 – Les trois figuresreprésentent chacune une des composantes du champ électrique secondaire à la surface en pourcentage par rapport au champ primaire pour les paramètres de référence : une fréquence de 100Hz, une hétérogénéité entre 1km et 1.5km de profondeur avec une conductivité de 0.01 $S.m^{-1}$. En haut à gauche est représentée la composante en X, en haut à droite la composante en Y et en bas à gauche celle en Z. L'axe des X est l'axe des ordonnés et pointe vers le Nord, l'axe des Y est sur l'axe des abscisses et pointe vers l'Est, de façon à reproduire le schéma d'acquisiton habituellement utilisé en magnétotellurie. Le rectangle noir sur chaque figure rprésente la position de l'hétérogénéité

Le champ électrique secondaire généré par l'hétérogénéité est de l'ordre de quelques pourcents et les effets sont localisés à proximité de l'hétérogénéité.

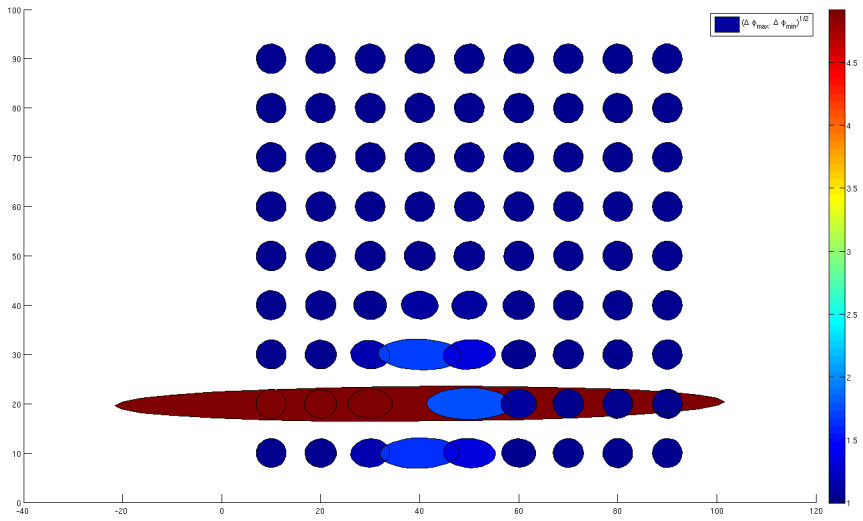

FIGURE 4.2 – Sont représentés les ellipses ayant pour demi grand axe Φ_{max} et pour dmi petit axe Φ_{min} à la surface. L'axe des abscisses pointe vers l'Est et son unité est la centaine de m, l'axe des ordonnées pointe vers le Nord et a la même échelle. Les paramètres sont ceux de référence : une fréquence de 100Hz, une hétérogénéité entre 1km et 1.5km de profondeur avec une conductivité de 0.01 $S.m^{-1}$.

On voit clairement une ellipse qui se détache des autres juste au-dessus de l'hétérogénéité dans le cas où elle est peut profonde.

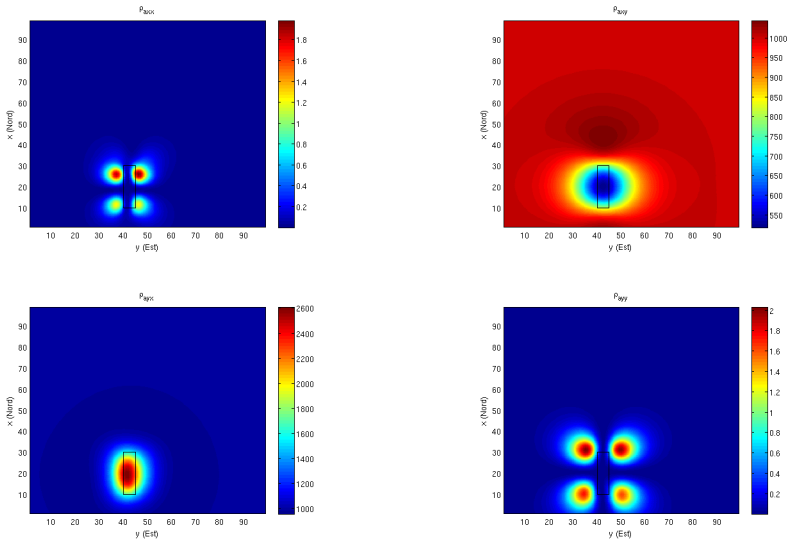

FIGURE 4.3 – Résistivité apparente pour les paramètres de référence. Les termes les plus significatifs sont les termes antidiagonaux

On constate que sur les termes antidiagonaux la résistivité apparente est de 1000 $\Omega.m$ ce qui correspond à la valeur de conductivité donnée pour le milieu homogène donc le modèle est cohérent sur ce point. Pour le terme en xy on a une anomalie de résistivité négative au niveau de l'hétérogénéité, alors qu'on a une

anomalie positive pour le terme en yx.
On va maintenant modifier certains paramètres, en commen cant par reagarder l'effet d'une agmentation de la profondeur à laquelle se situe l'hétérogénéité en la plaçant entre 10km et 10.5km de profondeur.

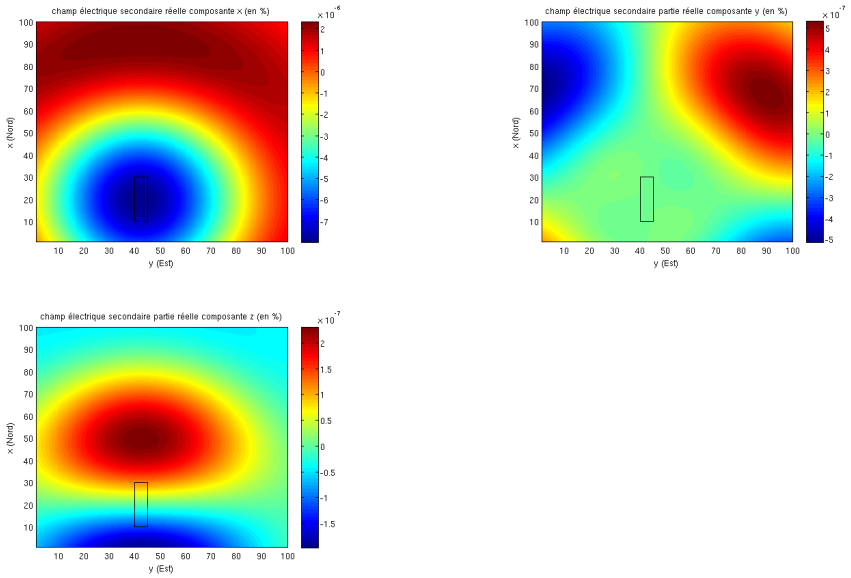
champ électrique secondaire réelle composante x (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante y (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante z (en %)
x (Nord)
y (Est)

FIGURE 4.4 – Les trois figuresreprésentent chacune une des composantes du champ électrique secondaire à la surface en pourcentage par rapport au champ primaire pour une fréquence de 100Hz, une hétérogénéité entre 10km et 10.5km de profondeur avec une conductivité de 0.01 $S.m^{-1}$.

Quand la zone de conductivité différente est située plus en profondeur, on voit que le champ électrique secondaire mesuré en surface est beaucoup plus faible et que les effets sont beaucoup étendus , ils sont moins localisés autour de l'hétérogénéité. Ce résultat est conforme à ce dont on pouvait s'attendre.

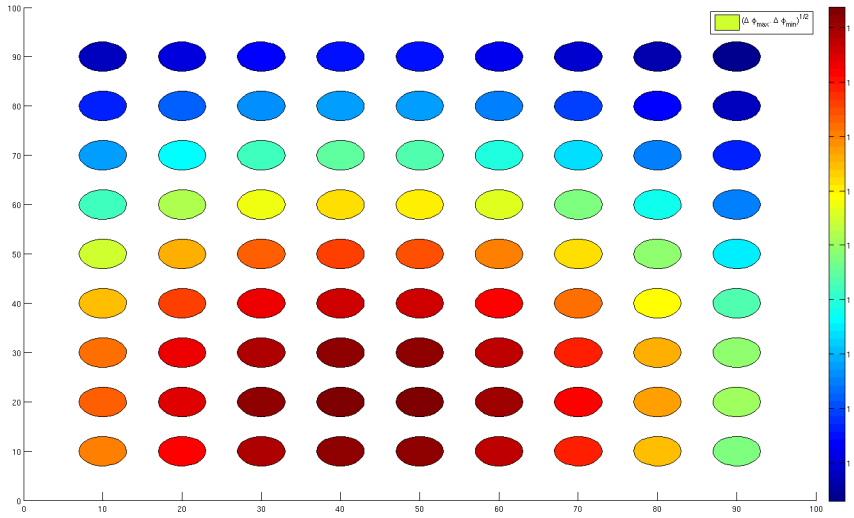

FIGURE 4.5 – Sont représentés les mêmes ellipses que précédement, cette foi l'hétérogénéité est situées entre 10km et 10.5km de profondeur.

Les ellipses sont quasiment indiscernable quand l'hétérogénéité est plus profonde. Là encore on constate un étalement de la zone d'effet avec un augmentation de la profondeur et une atténuation des effets.
On peut maintenant regarder les effets d'une augmentation de la fréquence :

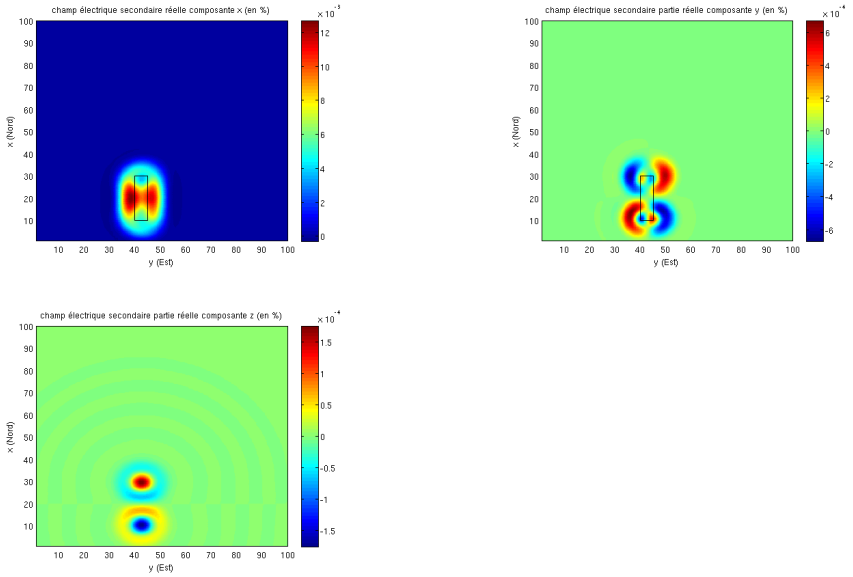
champ électrique secondaire réelle composante x (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante y (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante z (en %)
x (Nord)
y (Est)

FIGURE 4.6 – Composantes du champ électrique secondaire à la surface en pourcentage par rapport au champ primaire pour une fréquence de 10000Hz, les autres paramètres étant ceux de référence.

La fréquence ayant augmenté, l'épaisseur de peau diminue, elle vaut ici 160m. On est donc moins sensible à des objets en profondeur, le champ électriques secondaire est beaucoup plus faible et les ellipses sont pratiquement toutes identiques.
Enfin on peut regarder l'effet d'une augmentation de la conductivité de l'hétérogénéité :

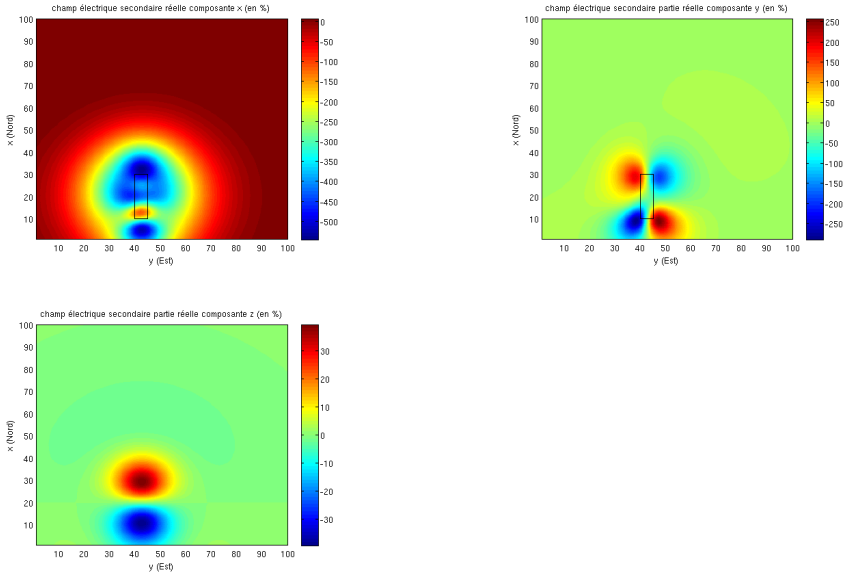
champ électrique secondaire réelle composante x (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante y (en %)
champ électrique secondaire partie réelle composante z (en %)
x (Nord)
y (Est)

FIGURE 4.7 – Composantes du champ électrique secondaire à la surface en pourcentage par rapport au champ primaire pour une conductivité de l'hétérogénéité de $0.1S.m^{-1}$, les autres paramètres étant ceux de référence.

Le champ électrique secondaire ressemble à celui de référence, à ceci près qu'il est 100 fois plus intense.

4.3 Modélisation de monitoring

On va maitenant reproduire les experiences de monitoring de Peacock en Australie en calculant d'abord le tenseur de phase pour le milieu homogène puis puis après avoir introduit une zone de conductivité différente. On va ensuite regarder le résidu (3.1) et tracer les ellipses de la même manière que lors du traitement.

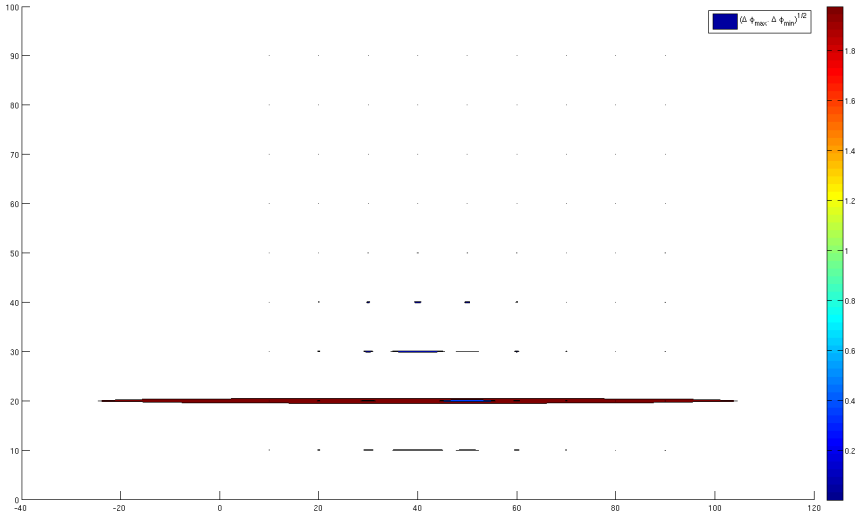

FIGURE 4.8 – Ellipses obtenues à partir du résidu, la zonne de conductivité différente est située au même endroit que l'hét{erogénéité dans la partie précédente

Les ellipses sont plus grandes au niveau de la zone où la conductivité à changé, cenpendant elles ne s'allignent pas avec la direction de cette zone.

5 Discussion

Pour la partie traitement, les erreurs sur le tenseur d'impédance sont trop grandes, surtout aux basses fréquences, on ne peut donc pas atteindre la profondeur voulue. Il est posible que les ellipses reflètent l'orientation de la faille Nord-Sud présente à Rittershoffen.
Sur les experiences de modélisation, les effets des variations d'un paramètre sont en général conformes à ceux attendus, bien qu'une seule itération ait été effectuée. La comparaison des résultats de la modélisation et des résultats de l'experience de Peacock est moyennement satisfaisante : on obtient bien une augmentation de la taille des ellipses atour de la zone où la conductivité a changé, cependant elles ne s'alignent pas avec la direction de l'hétérogénéité. Celà est peut-être dû au fait que l'hétérogénéité modélisée n'était pas assez étendue selon une direction par rapport à l'autre. Le temps de calcul étant lié à la taille de l'hétérogénéité il n'a pas été possible de l'allonger selon une direction durant ce stage.

6 Conclusion

Dans cette étude l'accent a été mis sur le tenseur de phase du tenseur d'impédence, celui-ci n'étant pas sensible aux petites hétérogénéité peut profondes qui posent habituellement problême en magnétotellurie. Dans la partie traitement l'utilisation de ce tenseur de phase a donné des résultats mitigés car les barres d'erreur sur le tenseur d'impédance sur les données acquises en juin-juillet 2013 sont trop grandes. Ces erreurs sont encore plus importantes aux basses fréquences qui sont celles nous interressant le plus car ce sont ces basses fréquences qui nous permettent d'éclairer la profondeur à laquelle il y a potentiellement eu un changement de conductivité suite à l'injection de fluides.
Les modélisation ont données des résultats cohérents, cependant à cause d'un problême de convergence il n'a pas été possible de faire plusieurs d'itérations, il reste donc encore du travil à effectuer dans ce sens. Il serait également interressant de modéliser une hétérogénéité plus allongée dans une direction avec un ordinateur plus performant pour vérfier l'allignement des ellipses avec la direction de l'hétérogénéité.
Une autre modélisation possible serait de rajouter de petites hétérogénéités au-dessus de la principale dans la modélisation pour voir le si tenseur de phase n'y est vraiment pas sensible.

A Calcul des invariants du tenseur de phase

Dans cette partie on va démontrer que Φ_{max} et Φ_{min} sont les racines des valeurs propres de la matrice $\Phi^T\Phi$.

On commence par rappeler les expressions de Φ_{max} et Φ_{min} :

$$\Phi_{min} = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2} - \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2 - det(\Phi)}$$

$$\Phi_{max} = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} + \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_3^2 - det(\Phi)}$$

avec $\Phi_1 = \frac{\Phi xx+\Phi yy}{2}$, $\Phi_3 = \frac{\Phi xy+\Phi yx}{2}$ et $det(\Phi) = \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx}$.

On calcule ensuite la matrice $\Phi^T\Phi$:

$$\Phi^T\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}^2 + \Phi_{yx}^2 & \Phi_{xx}\Phi_{xy} + \Phi_{yx}\Phi_{yy} \\ \Phi_{xy}\Phi_{xx} + \Phi_{yy}\Phi_{yx} & \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yy}^2 \end{bmatrix}$$

On va calculer le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\lambda^2 - \lambda(\Phi_{xx}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2 + \Phi_{yy}^2) - \Phi_{xx}^2\Phi_{xy}^2 - \Phi_{yx}^2\Phi_{yy}^2 - 2\Phi_{xx}\Phi_{xy}\Phi_{yx}\Phi_{yy} + \Phi_{xx}^2\Phi_{xy}^2 + \Phi_{xx}^2\Phi_{yy}^2 + \Phi_{yx}^2\Phi_{xy}^2 + \Phi_{xy}^2\Phi_{yy}^2$$

Qui s'écrit aussi :

$$\lambda^2 - \lambda(\Phi_{xx}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2 + \Phi_{yy}^2) + (\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx})^2$$

Le déterminant de cepolynôme vaut :

$$\Delta = (\Phi_{xx}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2 + \Phi_{yy}^2)^2 - 4(\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx})^2$$

Soit :

$$\Delta = (\Phi_{xx}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2 + \Phi_{yy}^2 - 2\Phi_{xx}\Phi_{yy} + 2\Phi_{yx}\Phi_{xy})(\Phi_{xx}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2 + \Phi_{yy}^2 + 2\Phi_{xx}\Phi_{yy} - 2\Phi_{yx}\Phi_{xy})$$

$$\Delta = ((\Phi_{xx} - \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} + \Phi_{xy})^2)((\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2)$$

Les solutions sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\Phi_{xx}^2 + \Phi_{yy}^2 + \Phi_{xy}^2 + \Phi_{yx}^2}{2} \pm \frac{\sqrt{((\Phi_{xx} - \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} + \Phi_{xy})^2)((\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 - 2\Phi_{xx}\Phi_{yy} + (\Phi_{xy} - \Phi_{yx})^2 + 2\Phi_{xy}\Phi_{yx}}{2} \pm$$

$$\frac{\sqrt{((\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 - 4\Phi_{xx}\Phi_{yy} + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2 + 4\Phi_{xy}\Phi_{yx})((\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{xy} - \Phi_{yx})^2}{4} + \frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{xy} - \Phi_{yx})^2}{4} - (\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx}) \pm$$

$$2\sqrt{\frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2}{4}}\sqrt{\frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2 + (\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2}{4} - (\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx})}$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2}{4} + \frac{(\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2}{4}} \pm \sqrt{\frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^2}{4} + \frac{(\Phi_{yx} - \Phi_{xy})^2}{4} - (\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}\Phi_{yx})}\right)^2$$

On a bien $\Phi_{max} = \sqrt{\lambda_1}$ et $\Phi_{min} = \sqrt{\lambda_2}$

B Détails du code de modélisation

Pour le calcul du champ $\vec{B}$ en surface, on procède en deux étapes. On commence par calculer en surface et pour la couche du dessous la grandeur suivante :

$$\vec{B_1}(r) = \int (\sigma_1(r') - \sigma_0(r')) \frac{exp(i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|} \vec{E}(r')dv'$$

La formule pour calculer $\vec{B}$ est :

$$\vec{B}(r) = \vec{B_0}(r) + \mu_0\vec{\nabla} \otimes \int \frac{exp(i\sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r'}|} (\sigma_1(r') - \sigma_0(r'))\vec{E}(r') = \vec{B_0}(r) + \mu_0\vec{\nabla} \otimes \vec{B_1}(r)$$

Pour calculer $\vec{\nabla} \otimes \vec{B_1}(r)$ on va calculer en tout point $(x, y, 0)$ de la surface :

$$B_x(x, y, 0) = B_{0x}(x, y, 0) + \mu_0 \times [\frac{B_{1z}(x, y + 1, 0) - B_{1z}(x, y, 0)}{d_z} - \frac{B_{1y}(x, y, 1) - B_{1y}(x, y, 0)}{d_z}]$$

$$B_y(x, y, 0) = B_{0y}(x, y, 0) + \mu_0 \times [\frac{B_{1x}(x, y, 1) - B_{1x}(x, y, 0)}{d_z} - \frac{B_{1z}(x + 1, y, 0) - B_{1z}(x, y, 0)}{d_z}]$$

$$B_z(x, y, 0) = B_{0z}(x, y, 0) + \mu_0 \times [\frac{B_{1y}(x + 1, y, 0) - B_{1y}(x, y, 0)}{d_z} - \frac{B_{1x}(x, y + 1, 0) - B_{1x}(x, y, 0)}{d_z}]$$

Avec d_z la distance choisie entre deux cellules voisines. On voit qu'on avait besoin de connaître $\vec{B_1}$ en $(x, y, 1)$, c'est pourquoi on l'a calculé sur deux couches.
Pour calculer le tenseur d'impédance à la surface on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ E_{y1} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{x1} & B_{y1} & 0 & 0 \\ B_{x2} & B_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{x1} & B_{y1} \\ 0 & 0 & B_{x2} & B_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} \\ Z_{xy} \\ Z_{yx} \\ Z_{yy} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Les termes en indices 1 sont ceux avec le champ électrique polarisé selon l'axe des X et sont indicés 2 sont ceux avec le champ électrique polarisé selon l'axe des Y.